rotational motion and gravity. *Journal of Research in Science Teaching,* **28** [1], 3-18, 1991.

Boyes, E.; Chambers, W & Stanisstreet, M., Trainee primary teachers' ideas about the ozone layer. *Environmental Education Research,* **1** [2], 133-45, 1995.

Dove, J., Student teacher understanding of the greenhouse effect, ozone layer depletion and acid rain. *Environmental Education Research,* **2** [1], 89-100, 1996.

Driver, R.; Guesne, E., & Tiberghien, A., *Children's Ideas in Science,* Philadelphia: Open University Press, 1985.

Driver, R.; Squires, A., Wood-Robinson, V., *Making Sense of Secondary Science: Research into Children's Ideas*, London: Routledge, 1994.

Groves, F.H. & Pugh, A.F., Elementary pre-service teacher perceptions of the greenhouse effect. *Journal of Science Education and Technology,* **8** [1], 75- 81,1999.

Hashweh, M.Z., Effects of subject matter knowledge in the teaching of biology and physics. *Teaching and Teacher Education,* **3** [2], 109-120, 1987.

Hewson, M.G. & Hewson, P.W., Effect of instruction using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning. *Journal of Research in Science Teaching,* **20**, 731-743, 1983.

Kallery, M. & Psillos, D., Pre-school teachers' content knowledge in science: Their understanding of elementary science concepts and of issues raised by children's questions. *International Journal of Early Education,* **9** [3], 165-179, 2001.

Kruger, C., Some primary teachers' ideas about energy. *Physics Education,* **25** [2], 86-91, 1990.

Kruger, C.; Summers, M. & Palacio, D., A survey of primary school teachers' conceptions of force and motion. *Educational Research*, **32** [2], 83-95, 1990.

Libarkin, J.C. & Anderson, S., The Geoscience Concept Inventory, in preparation.

Mak, S.Y.; Yip, D.Y. & Chung, C.M., Alternative conceptions in biology-related topics of integrated science teachers and implications for teacher education. *Journal of Science Education and Technology,* **8** [2], 161-170, 1999.

Mellado, V., Preservice teachers' classroom practice and their conceptions of the nature of science. *Science and Education,* [6], 331-354, 1997.

Murcia, K. & Schibeci, R., Primary student teachers' conceptions of the nature of science. International *Journal of Science Education,* **219** [11], 1123-1140, 1999.

Pardhan, H. & Bano Y., Science teachers' alternate conceptions about direct currents. *International Journal of Science Education,* **23** [3], 301-318, 2001.

Pomeroy, D., Implications of teachers' beliefs about the nature of science: Comparison of beliefs of scientists, secondary science teachers, and elementary teachers. *Science Education,* **77** [3], 261-278, 1993.

Preece, P.F.W., Force and motion: Pre-service and practicing secondary science teachers' language and understanding. *Research in Science & Technology Education,* **15** [1], 123- 128, 1997.

Sanders, M., Erroneous ideas about respiration: The teacher factor. *Journal of Research in Science Teaching,* **30** [8], 919-934, 1993.

Schoon, K.J., The origin and extent of alternative conceptions in the earth and space sciences: A survey of pre-service elementary teachers. *Journal of Elementary Science Education,* **7** [2], 27-46, 1995.

Schoon, K.J. & Boone, W.J., Self-efficacy and alternative conceptions of science of pre-service teachers. *Science Education,* 82 [5], 553-568, 1998.

Stofflett, R.T., Preservice elementary teachers' knowledge of rocks and their formation. *Journal of Geological Education,* 41, 226-230, 1993.

Trend, R., Conceptions of geological time among primary teacher trainees, with reference to their engagement with geoscience, history and science. *International Journal of Science Education,* 22 [5], 539-555, 2000.

Trend, R., Deep time framework: A preliminary study of UK primary teachers' conceptions of geological time and perceptions of geoscience. *Journal of Research in Science Teaching,* **38** [2], 191-221, 2001.

Trumper, R., A cross-college age study of science and nonscience students' conceptions of basic astronomy concepts in preservice training for high-school teachers. *Journal of Science Education and Technology,* **10** [2], 189-95, 2001.

Received: 18.08.2004 / Accepted: 15.09.2005

Tablas de Young como herramienta docente en matemáticas
Teaching mathematics with Young tableaux

Jesús Fernando Novoa Ramírez

Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia
fernando.novoa@javeriana.edu.co

Resumen

Las tablas de Young presentan características y propiedades que las hacen herramientas adecuadas tanto para introducir conceptos matemáticos elementales, como para realizar investigación en diversas ramas de la matemática, ciencias de la computación y la física. En este trabajo se presentan algunas ideas y ejemplos para usar las tablas como herramientas en docencia de la matemática, para introducir los conceptos de función, relación y operación desde la escuela secundaria.

Palabras clave: Tabla de Young, función, relación, operación.

Abstract

Young tableaux present properties and characteristic allowing them to be adequate tools to introduce mathematical simple concepts and also providing powerful research ideas in mathematics, physics and computer science. In this work we present some examples in order to illustrate how Young tableaux can be used to present the concept of function, relation and operation in high school.

Key words: Young tableaux, function, relation, operation.

INTRODUCCIÓN

Las tablas de Young nos permitirán introducir desde los primeros cursos de secundaria las nociones de función, relación, relación de orden, relación de equivalencia, operación y polinomios, por medio de preguntas y construcciones naturales, las cuales estimulan en el estudiante la necesidad de preguntarse sobre la validez de sus razonamientos con base en el conteo de dichas construcciones. Algunos números como los factoriales y las combinatorias, lo mismo que las permutaciones, tienen en este contexto un lugar muy especial. Es de recordar que productos notables y el teorema del binomio de Newton, requieren de factoriales y combinatorias para representar algunos de sus coeficientes con la dificultad de encontrar ejemplos para motivar estos números y se tienen que presentar a través de las definiciones usuales. Por lo tanto, las siguientes construcciones pretenden ofrecer algunos ejemplos de los usos de estos diagramas a nivel de educación media.

Un diagrama de Young o de Ferreλ es un arreglo de cajas alineadas a la izquierda. El número de cajas en la fila i se denota como λ_i y la secuencia de longitudes de las filas de la tabla de Young satisface$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k > 0$. Los$\lambda_i$ se llaman las partes de λ y se identifica cada diagrama con la secuencia$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$. Así por ejemplo, (3,3,2,1) se representa como

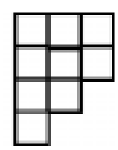


Figura 1

Los diagramas de Young están muy relacionados con las particiones enteras de un número.

Una partición de n es una sucesión $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$ y$\lambda_1 \geq$ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq, ... \geq \lambda_k$). Para $n = 5$ tenemos 7 particiones que podemos identificar por su tabla de Young correspondiente:

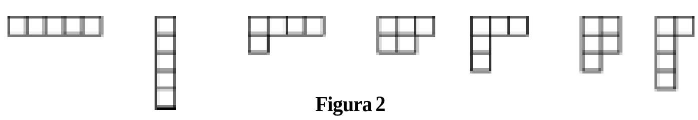
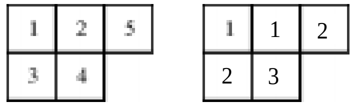


Figura 2

las cuales representan a las particiones (5), (1,1,1,1,1), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1).

Al remplazar cada entrada por un número (usualmente un número natural) en un diagrama de Young obtenemos una tabla de Young. Hay muchas clases de tablas de Young y afortunadamente, cada cual podrá definir una clase de tablas para que satisfagan las condiciones que desee o necesite. Entre las tablas más usadas están las estándar y las semiestándar. Una tabla se dice estándar si no se permiten repeticiones y toda fila y toda columna es una secuencia estrictamente creciente cuando las leemos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Si las filas son débilmente crecientes (pero las columnas estrictamente crecientes) entonces las tablas se dicen semiestándar.



Las tablas anteriores son ejemplos de tablas estándar y semiestándar respectivamente, de la forma (3,2).

Estas tablas permiten introducir el concepto de función: a cada caja le corresponde un único número. Similarmente, podemos en forma sencilla recrear los conceptos de relación de orden y relación de equivalencia tanto para diagramas como para tablas.

Si remplazamos las entradas de los diagramas por variables, se tiene la posibilidad de usar y generar polinomios en varias variables. Con los polinomios y sus relaciones en ciertos espacios vectoriales (o módulos) tenemos transformaciones lineales, bases, matrices, matrices de cambio de base para transformaciones entre espacios vectoriales y módulos. Con estos módulos y sus bases en términos de tablas de Young, A. YOUNG, e I. SCHUR, desarrollaron la teoría de representaciones de los grupos $GL(n)$ sobre los complejos. Las áreas de aplicación de estas tablas se encuentran en campos como la combinatoria, física, física cuántica, geometría y la teoría de computación.

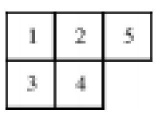
Antes de continuar con las propiedades de las tablas y diagramas de Young, recordemos que si realizamos una búsqueda rápida sobre el tema de tablas de Young (véanse referencias), hallamos fácilmente que las tablas de Young se encuentran de una u otra forma relacionadas con temas tales como: variedades de Grassman, y variedades bandera, polinomios de Schur, de Schubert, representaciones de grupos de simetría y del grupo general lineal $GL(n)$, estadísticas del grupos de permutaciones, longitud de subsucesiones crecientes y decrecientes de una sucesión, caminos aleatorios, problemas de conteo como la fórmula de Robinson y Thrall, funciones generatrices, tablas de Yamanouchi, la correspondencia de Robinson-Schensted-Knuth, entre otros.

USOS DE LOS DIAGRAMAS Y TABLAS DE YOUNG

Por simplicidad tomamos el conjunto $[n] = \{1, ..., n\}$ para las entradas de una tabla de Young. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ una partición de n. Una tabla de Young es una función cuyo dominio es el diagrama de λ y su codominio es $[n]$. Es decir, a cada caja del diagrama le corresponde un número de $[n]$.

A nivel elemental, esta forma de crear una tabla de Young a partir de su diagrama, puede remplazar la definición formal de función mientras el concepto de variable, dominio, codominio y relación se puede presentar en forma general. Además recordemos que casi todos hemos jugado de niños rayuela (goloza), la cual se juega sobre lo que podemos considerar una tabla de Young de una forma especial.

Ejemplo 1. La tabla



representa la función

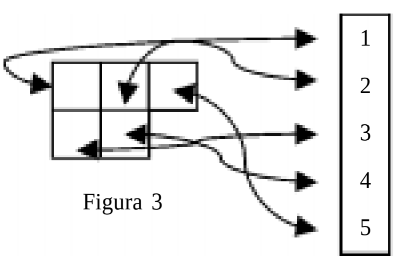


Figura 3

y por supuesto, funciones inyectivas o funciones sobreyectivas se pueden presentar haciendo los ajustes necesarios.

Teniendo fija la partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ es natural preguntarse cuántas "funciones" podemos hacer de esa forma. Claramente este es un problema de conteo el cual debe ser abordado con mucho cuidado. Por ejemplo, para hallar las soluciones al problema es necesario colocar ciertas condiciones desde las cuales el estudiante pueda hacer acercamientos a la solución. ¿Permitimos o no repeticiones? Esto hace que las repuestas sean muy variadas. Por ejemplo, si el estudiante conoce los números factoriales, nos permitiría hacer un acercamiento diferente para la necesidad de estos números. Por otro lado, si no conoce los factoriales, tal vez esta sea la oportunidad de presentarlos con un ejemplo sencillo. Recordemos que los factoriales aparecen ya en octavo grado cuando se introduce el teorema del binomio de Newton. Por ejemplo, si $\lambda = (2,1)$ las tablas de Young (sin repeticiones) son $6 = 3!$

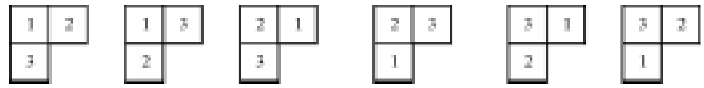


Figura 4

En caso de permitir repeticiones tenemos ejemplos de potencias, en este caso, 3^3

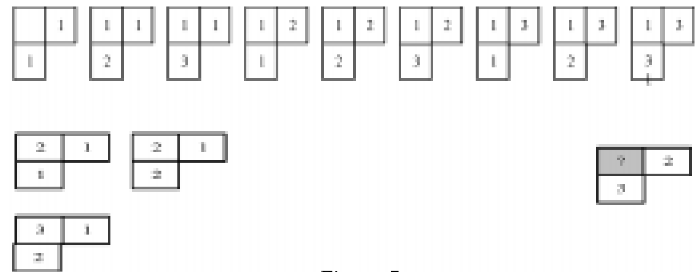


Figura 5

y podemos desarrollar ejemplos y ejercicios tales como completar la secuencia, ¿cuál es el número que corresponde a la caja sombreada en la figura anterior?, ¿cuántas tablas de esta forma en total tenemos? etc.

Si regresar al caso de donde no se admiten repeticiones, la construcción de las tablas permiten una forma adicional y muy visual para motivar el concepto de permutación: si el 1 ocupa la esquina superior izquierda, ¿en dónde se puede colocar el 2 y el 3? Similarmente, ¿quiénes pueden ocupar la esquina superior izquierda? etc. Estas son algunas preguntas naturales que se pueden formular si se desea construir permutaciones y factoriales.

Las relaciones entre objetos de una misma clase dan origen a relaciones de orden y de equivalencia, las cuales son fundamentales en el quehacer matemático y en la estructuración de toda una forma de identificar propiedades para reducir el número de casos distintos que se pueden presentar en una determinada situación. El número de conjugados de un elemento en un grupo, el número de permutaciones de un conjunto o el número de r-ciclos que representan un r-ciclo son ejemplos del uso de esta estrategia.

¿Qué tienen en común las siguientes tablas?

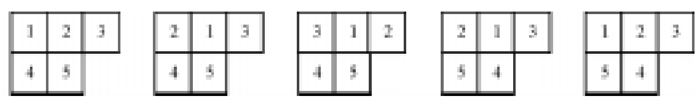


Figura 6

La idea es identificar algún tipo de patrón entre estas tablas. No es difícil ver que por filas, estas tablas son iguales. Esta propiedad determina una relación de equivalencia: dos tablas λ, μ de la misma forma se relacionan si y solamente si tienen las mismas filas. Observando la figura 6, nacen en forma natural algunas preguntas. ¿Estas son las únicas tablas de esa forma que se relacionan?, ¿hay más tablas que se relacionan con las tablas dadas?, ¿cuántas son en total las tablas que se relacionan?, ¿existe una fórmula que nos dé el número total de estas tablas que se relacionan?

El formular preguntas es el ejercicio a hacer con jóvenes estudiantes para desmitificar la enseñanza de las matemáticas. Las matemáticas se desarrollan a través de preguntas, quitando y poniendo hipótesis. Al relajar o reforzar las condiciones de un teorema lleva a una conjetura y posiblemente a un nuevo teorema. También es posible que no lleve a nada, pero eso ya es un avance, porque de esta forma se han dado los primeros pasos en la construcción de una teoría propia.

Así como se hizo con relaciones de equivalencia se puede hacer con relaciones de orden, acciones (naturales) del grupo de permutaciones sobre las tablas, generación de polinomios, etc. Los siguientes son algunos ejemplos de lo que podemos hacer con estas tablas de manera informal pero usando conceptos matemáticos sin necesidad de definiciones complicadas.

Ejemplo 2. Considerar las particiones de 5 (véase figura 2) y declarar que

$(5) < (1,1,1,1,1) < (4,1) < (3,2) < (3,1,1) < (2,2,1) < (2,1,1,1)$

¿Qué hay de erróneo al declarar esto?, ¿se puede hacer eso?, ¿cuántos de estos órdenes se pueden hacer?, ¿son estos órdenes permutaciones?, ¿cuáles de estos órdenes se pueden escribir matemáticamente usando los símbolos conocidos? en fin, este tipo de preguntas y respuestas dan una idea de cómo algunos conceptos pueden ser abordados con situaciones diferentes a las tradicionales.

Ejemplo 3. El orden lexicográfico.
(5) > (4,1) > (3,2) > (3,1,1) > (2,2,1) > (2,1,1,1) > (1,1,1,1,1)

¿Por qué lexicográfico?, ¿cómo expresarlo en palabras?, ¿cómo expresarlo en símbolos?, ¿en general cómo se define el orden lexicográfico?

El poder expresar las ideas por medio de símbolos matemáticos y viceversa, poder explicar las ideas y símbolos matemáticos con palabras del lenguaje común es una de las competencias y procesos a desarrollar y cultivar para el progreso de cualquier ciencia.

Ejemplo 4. Conocido es de todos que hay órdenes no lineales. Es decir, es posible que dados a, b elementos en un conjunto parcialmente ordenado, ni $a < b$, ni $b < a$. Este es el caso por ejemplo entre subconjuntos de un conjunto dado. Imitando este tipo de órdenes se puede presentar un orden parcial no sobre particiones de un número sino sobre el conjunto de todas las particiones, y se dice que $\lambda \leq \mu$ si el diagrama de λ cabe en el diagrama de μ.

Empezar con un cuadro ■ que representa la única partición de 1. Continúa con las particiones de 2, que son ■□ y ▀. Siguiendo de esta forma, introducir este orden entre particiones y un ejemplo sencillo y muy visual de un orden parcial para los estudiantes. Los números reales con el orden natural es posiblemente el único ejemplo de un conjunto ordenado que el estudiante verá en su bachillerato y puede llegar a creer que todos los órdenes son lineales.

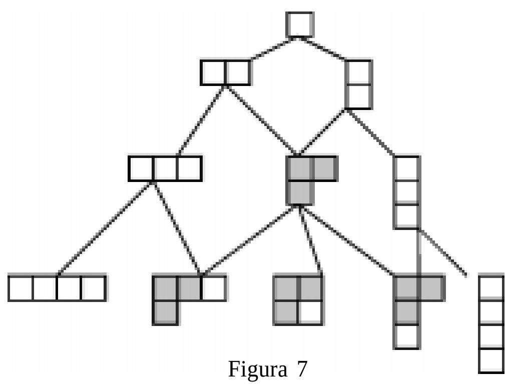


Figura 7

Ejemplo 5. Dada una partición en el nivel 3, ¿en dónde se puede adicionar un cuadrito para obtener una partición del nivel 4?

Observe la figura 7 y la partición (2,1) sombreada.

De nuevo, la idea es plantear y resolver preguntas surgidas de las construcciones y de las inquietudes naturales del estudiante y también del instructor, y en determinados casos llevar el grupo al descubrimiento de algo que es necesario que el estudiante descubra, identifique y maneje sin la necesidad de una fórmula o definición. La idea no es ejecutar fórmulas. Plantear preguntas, descartar respuestas, generar más preguntas y discutir respuestas, puede convertirse en una alternativa metodológica para ciertos temas que algunas veces carecen de motivación por falta de construcciones y ejemplos.

Otro ejemplo de orden con diagramas de Young, involucra directamente las cajas que lo componen. ¿Cómo distinguir entre las cajas de un diagrama? La forma tradicional es enumerar o marcar las cajas según la fila y la columna en la que esté la caja.

Ejemplo 7. En el diagrama de la partición λ la entrada $(i, j) \leq (a, b)$ si $i \leq a$ y $j \leq b$. Además $(i, j) < (a, b)$ si y sólo si $(i, j) \leq (a, b)$ y $(i, j) \neq (a, b)$.

La figura 8 muestra la entrada (1,2) (caja negra) y las entradas sombreadas en gris son estrictamente mayores que (1,2) . Observe que éste tampoco es un orden total. Por ejemplo, (2,2) y (1,4) no son comparables en este orden. Sin embargo (1,2) < (2,2) y (1,2) < (1,4) ¿Cómo son los intervalos en este orden?, ¿cuál es la descripción geométrica de los intervalos?, ¿cómo se determina la longitud máxima de un intervalo con punto inicial y punto final dados?

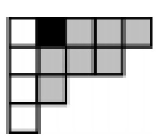


Figura 8

Con este orden sobre el diagrama (el dominio), se puede ahora pensar en funciones crecientes, decrecientes etc., definidas sobre un diagrama de Young. En particular, una tabla estándar de la forma λ es una función creciente definida sobre el diagrama de Young de la partición λ de n, con valores en $[n] = \{1,...,n\}$. Recordemos que f se dice creciente (estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, respectivamente) si dados $a < b$ entonces, $f(a) \leq f(b)$ ($f(a) < f(b)$, $f(b) \leq f(a)$, $f(b) < f(a)$, respectivamente).

Ejemplo 8. Las siguientes son funciones estrictamente crecientes definidas sobre el diagrama de la partición (3,2).

1	2	5
3	4	

1	3	4
2	5	

El estudiante puede hallar todas las gráficas de estas funciones estrictamente crecientes por inspección. Se puede modificar el ejemplo y pedir las funciones decrecientes o estrictamente decrecientes etc. Este tipo de construcciones desmitifica la creencia que toda función creciente o decreciente debe tener por gráfica algo que sube o que baja

Note sin embargo, que problemas relativamente sencillos en su formulación con tablas de Young pueden ser de difícil solución. Esto hace de las tablas de Young elementos de gran interés en investigación matemática y a su vez, apropiados en docencia. Por ejemplo, las pruebas conocidas sobre el número exacto de tablas estándar de una cierta forma no son fáciles de asimilar. Sin embargo, algunos de los elementos que se involucran en estas pruebas se pueden llevar en forma lúdica al aula de clase. El gancho de una entrada es uno de estos conceptos que induce a buscar patrones y relaciones poco tradicionales en la enseñanza de la matemática y que sorprendentemente produce la solución al problema de conteo de las tablas estándar.

Una de las ventajas que presentan las tablas es poder construir objetos matemáticos solamente por el gusto de construirlos y ver que esos objetos construidos porque sí no son sólo porque sí, y que nos presentan agradables sorpresas.

Ejemplo 9. Consideremos las tablas **A** y **B** de la forma (2, 2) con las letras x, y, z, w:

A

x	y
z	w

B

x	z
y	w

Figura 9

Formemos por cada tabla los siguientes polinomios: productos de las entradas, producto de las diferencias por columnas y producto de diagonales. En estos casos se tiene:

	A	B
Producto de entradas	$xyzw$	$xyzw$
Producto de las diferencias por columnas	$(x-z)(y-w)$	$(x-y)(z-w)$
Diferencia del producto de sus diagonales	$xw - yz$	$xw - yz$

En algunos casos los polinomios para ambas tablas coinciden, en otros no. Algunos nos sirven para introducir el determinante de una matriz, otros parecen sólo capricho. Continuando con el ejemplo, sean $f = (x - z)(y - w)$ y $g = (x - y)(z - w)$. Permutando en las tablas A y B las letras x *por* y, y por w, z por x, w por z, se obtienen las siguientes tablas:

A

y	w
x	z

B

y	x
w	z

Figura 10

Con sus correspondientes polinomios:

	A	B
Producto de las diferencias por columnas	$(y-x)(w-z)$	$(y-w)(x-z)$

¿Qué relaciones hay entre f y g y los nuevos polinomios?, ¿Qué pasa con otras permutaciones? ¿Podemos usar el algoritmo de la división para establecer relaciones entre f y g y los nuevos polinomios? En fin, son muchas las preguntas y relaciones que se pueden obtener si se usan estas tablas.

Ahora, ver cómo operar dos tablas y producir una nueva. La siguiente presentación de una operación con tablas es conocida como el algoritmo de

Robinson-Schensted-Knuth. Esta operación cumple varios objetivos: es lúdica, fácil de entender y jugar por cualquiera, presenta una operación entre objetos que no son números.

Ejemplo 10. Con las tablas

se forma la siguiente configuración:

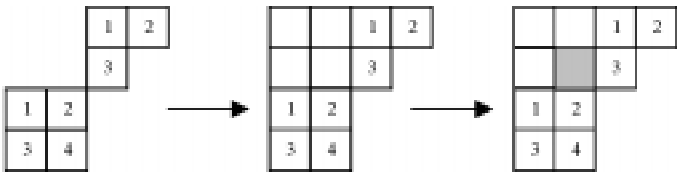
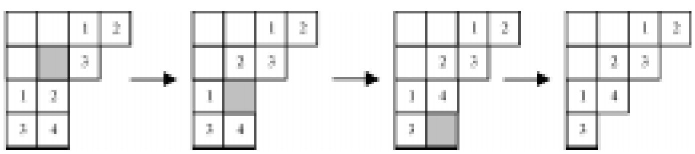


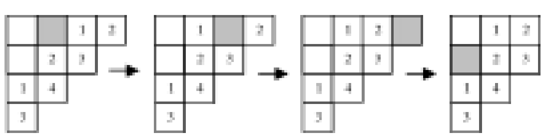
Figura 11

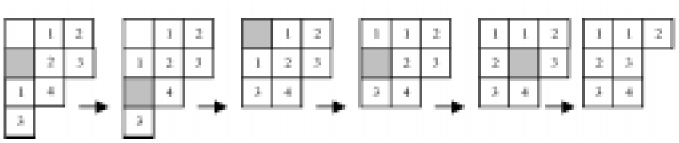
La idea es simplemente llenar la parte que aparece sin números e ir eliminando cajas vacías. La caja sombreada se llama una esquina porque las cajas **debajo** de ella y a la **derecha** se encuentran ocupadas. Estas dos cajas se llaman vecinas de la caja sombreada según la siguiente regla: el menor vecino de la caja sombreada se mudará a la caja sombreada, la caja sombreada será en donde se hallaba el menor de los vecinos y en caso que los dos vecinos sean iguales, entonces se mudará a la caja sombreada el vecino de abajo. Si no hay vecinos, se elimina esa caja sombreada y se toma otra en la parte vacía de la configuración, hasta eliminar todas las cajas vacías.



Se ve que, ahora hay dos posibles cajas sombreadas: entonces seleccione una cualquiera. Enseguida surge una pregunta: ¿da lo mismo si tomo la otra? ¿por qué?

Finalicemos este juego:





El resultado es una función creciente. ¿Por qué? ¿La operación es conmutativa?

En la actualidad ya se cuenta con rutinas para el cómputo de algunas de estas nociones. La siguiente figura ilustra el resultado de la operación del ejemplo 10:

CONCLUSIONES

Se han presentado algunas ideas para motivar e introducir desde el aula de clase en el bachillerato algunos conceptos y objetos matemáticos haciendo uso de tablas de Young. Los conceptos de función, relación, relación de orden y de equivalencia, operación y acciones sobre polinomios son construidos a partir de observaciones y juegos con las tablas sin necesidad de construcciones especializadas.

Posiblemente la aplicabilidad de estas tablas a la solución de problemas geométricos o de la vida diaria no se vea inmediatamente como sí, puede ser el caso de los sistemas de ecuaciones o el cómputo de las raíces de un polinomio cuadrático, los cuales se pueden manipular en forma adecuada para que sean las herramientas usadas en la solución de alguna aplicación. Sin embargo, no hay que olvidar que el razonamiento lógico, la capacidad de abstracción, la posibilidad de hacer conjeturas y su verificación son procesos fundamentales en la formación matemática del estudiante, los cuales se ven estimulados con el tipo de construcciones presentado. Por otro lado, las aplicaciones de estas tablas son evidentes como se planteó en la introducción, en muchos campos y ahora se trata de presentarlas como herramientas docentes para la motivación de conceptos matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial a María del Pilar Orjuela, Sulma Amaya, César Barreto, Sebastián Duarte, Leoncio Rodríguez, Edier Espinoza, William Camacho, Mario Díaz, Diego Flórez y Hernando Bermúdez, quienes han realizado algunos programas para cómputos con tablas y grupos de permutaciones.

BIBLIOGRAFÍA

FULTON, W., *Young Tableaux with applications to representation theory and geometry*. Cambridge University Press, 1997.

GOLDSCHMIDT, D., *Group characters, symmetric functions and the Hecke algebra*. American Mathematical Society, 1993.

MACDONALD, I.G., *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford University Press, 1995.

MANIVEL, L., *Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci*. American Mathematical Society, 2001.

SAGAN, B., *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.* Springer-Verlag, 2001.

STANLEY R., Recent progress in algebraic combinatorics. *Bulletin of the American Mathematical society*, 2002.

Received: 6.09.2004 / Approved: 30.04.2005